SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018

Clasa a V-a

Problema 1

Ştiind că $4\overline{xyzt} < \overline{tzyx}$ şi că $\overline{xyzt} + \overline{tzyx} = \overline{aabaa}$, determinaţi numărul $\overline{xyzt}$ şi cifrele a și b.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Problema 2

Arătați că dacă $n = (\overline{abc})^2 = (a+b+c)^5$, atunci:
$a^3+b^3+c^3-(a+b+c+a^2+b^2+c^2)$ este număr prim.

E:15025 Gazeta Matematică Nr.6-7-8/2016
D. M. Bătinețu Giurgiu, București
Neculai Stanciu, Buzău

Problema 3

În cantonamentul de pregătire a preliminariilor Campionatului Mondial de Fotbal din Rusia, echipa de fotbal a României participă cu 25 de jucători: 3 portari și 22 de jucători de câmp(fundași, mijlocași, atacanți). Determinați câți jucători de cămp pot juca pe toate posturile(fundași, mijlocași, atacanți), dacă se știe că:

i) 5 dintre ei nu pot fi nici fundași, nici mijlocași;
ii) 6 nu pot fi nici mijlocași, nici atacanți;
iii) 4 dintre ei nu pot fi nici fundași, nici atacanți;
iv) exact 3 pot juca atât fundaș cât și atacant;
v) exact 3 pot juca atât fundaș cât și mijlocaș;
vi) exact 3 pot juca atât mijlocaș cât și atacant;

E:15166 Gazeta Matematică Nr.4/2017, Cristian Moanță, Craiova

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

Problemă pentru clasa a V-a
(propusă pentru etapa judeţeană)

Ştiind că $4\cdot\overline{xyzt}<\overline{tzyx}$ şi că $\overline{xyzt}+\overline{tzyx}=\overline{aabaa}$, determinaţi numărul $\overline{xyzt}$ şi cifrele a şi b.

Constantin APOSTOL, Rm. Sărat

Soluţie :

Din egalitatea dată, deducem : $1000x+100y+10z+t+1000t+100z+10y+x=$
$=10000a+1000a+100b+10a+a \Leftrightarrow 1001x+110y+110z+1001t=11011a+100b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 11\cdot 91x+11\cdot 10y+11\cdot 10z+11\cdot 91t=11^2\cdot 91a+100b$ ……3p
Din faptul că membrul I este divizibil cu 11, deducem că şi membrul al II-lea este divizibil cu 11, deci, $11\vert 100b$, ceea ce ne conduce la concluzia că $b=0$ ……2p
$\Rightarrow 91x+10y+10z+91t=11\cdot 91a \Leftrightarrow 91(x+t)+10(y+z)=11\cdot 91a$; $\Rightarrow 91\vert 10(y+z) \Rightarrow$
$\Rightarrow y=z=0$; deci, $91(x+t)=11\cdot 91a \Leftrightarrow x+t=11a$; din inegalitatea din enunţ, deducem că $4x<t$, de unde rezultă că $x=2$, $t=9$ şi $a=1$……..1p
Aşadar, $\overline{xyzt}=2009$, $a=1$ şi $b=0$ ……1p

E:15025. *Arătaţi că dacă* $n = \left(\overline{abc}\right)^2 = (a+b+c)^5$, *atunci*

$$a^3+b^3+c^3-\left(a+b+c+a^2+b^2+c^2\right)$$

este număr prim.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi *Neculai Stanciu*, Buzău

Soluţie. Din relaţia $\left(\overline{abc}\right)^2 = (a+b+c)^5$ deducem că $a+b+c$ este pătrat perfect şi $\overline{abc} = k^5$, (1), unde k este număr natural. Evident $k \in \{0,1,2\}$ nu verifică relaţia (1). Pentru $k \geq 4$ avem $k^5 \geq 1024$. Rezultă $k = 3$ şi atunci $\overline{abc} = 243$, de unde $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$. Acum, $a^3+b^3+c^3-(a+b+c+a^2+b^2+c^2) = 61$ care este număr prim.

Problema 3

În cantonamentul de pregătire a preliminariilor Campionatului Mondial de Fotbal din Rusia, echipa de fotbal a României participă cu 25 de jucători: 3 portari și 22 de jucători de câmp(fundași, mijlocași, atacanți). Determinați câți jucători de cămp pot juca pe toate posturile(fundași, mijlocași, atacanți), dacă se știe că:

i) 5 dintre ei nu pot fi nici fundași, nici mijlocași;
ii) 6 nu pot fi nici mijlocași, nici atacanți;
iii) 4 dintre ei nu pot fi nici fundași, nici atacanți;
iv) exact 3 pot juca atât fundaș cât și atacant;
v) exact 3 pot juca atât fundaș cât și mijlocaș;
vi) exact 3 pot juca atât mijlocaș cât și atacant;

E:15166 Gazeta Matematică Nr.4/2017, Cristian Moanță, Craiova

Soluţie. Notăm cu F mulţimea fundaşilor, cu M mulţimea mijlocaşilor, cu A mulţimea atacanţilor şi cu $|X|$ cardinalul mulţimii X. (1 punct) Din i) avem $|F \cup M| = 22-5 = 17$, din ii) avem $|M \cup A| = 22-6 = 16$ şi din iii) avem $|F \cup A| = 22-4 = 18$. Din iv) avem $|F \cap A| = 3$, din v) avem $|F \cap M| = 3$ şi din vi) avem $|M \cap A| = 3$. (1 punct) Folosind principiul includerii şi excluderii putem scrie $|F \cup M| = |F| + |M| - |F \cap M|$, adică $17 = |F|+|M|-3$ sau $|F|+|M| = 20$ (1) (1 punct) şi de asemenea $|M \cup A| = |M|+|A|-|M \cap A|$, adică $16 = |M|+|A|-3$ sau $|M|+|A| = 19$ (2), (1 punct) respectiv $|F \cup A| = |F|+|A|-|F \cap A|$, adică $18 = |F| + |A| - 3$ sau $|F| + |A| = 21$ (3). (1 punct) Adunând relaţiile (1), (2) şi (3) obţinem $|F| + |M| + |A| = 30$. (1 punct) Dar $|F \cup M \cup A| = |F| + |M| + |A| - |F \cap M| - |M \cap A| - |F \cap A| + |F \cap M \cap A|$, de unde $22 = 30 - 3 - 3 - 3 + |F \cap M \cap A|$, adică $|F \cap M \cap A| = 1$. Aşadar, un singur jucător de câmp poate juca pe toate posturile. (1 punct)

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018

Clasa a VI-a

Problema 1

Să se determine numărul $\overline{abcd}$ știind că numerele $\overline{abc}, \overline{bcd}, \overline{cda}$ și $\overline{dab}$ sunt direct proporționale cu numerele 24, 98, 123, respectiv 88 și suma cifrelor numărului $\overline{abcd}$ este multiplu al numărului 7.

Mihai Neagu, Rm. Sărat

Problema 2

Spunem că 101 numere naturale nenule au proprietatea (U) dacă suma lor este egală cu 1918. Notând cu d cel mai mare divizor comun al 101 numere cu proprietatea (U), să se determine cea mai mare valoare posibilă a lui d.

Costin Negrii, Bucureşti

Problema 3

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $AD \perp BC, D \in (BC), P \in (BC)$ astfel încât $BP = AB$ și $P_1 \in (BC)$ astfel încât $CP_1 = CA$. Arătați că:

$$m(\angle PAP_1) = 45^\circ.$$

Constantin Rusu, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

clasa a VI-a Mihai Neagu

Să se determine numărul $\overline{abcd}$ știind că numerele $\overline{abc}, \overline{bcd}, \overline{cda}, \overline{dab}$ sunt direct proporționale cu numerele 24, 98, 123, respectiv 88 și suma cifrelor numărului $\overline{abcd}$ este multiplu al numărului 7.

Rezolvare.

1 punct 1 punct 1 punct

$$\frac{\overline{abc}}{24}=\frac{\overline{bcd}}{98}=\frac{\overline{cda}}{123}=\frac{\overline{dab}}{88}=\frac{\overline{abc}+\overline{bcd}+\overline{cda}+\overline{dab}}{24+98+123+88}=\frac{111(a+b+c+d)}{333}=\frac{a+b+c+d}{3}$$

$7 / (a+b+c+d) \rightarrow a+b+c+d \in \{7,14,21,28,35\}$ 1 punct

Dedeucem $a+b+c+d = 21$, de unde rezultă 1 punct

$\overline{abc} = 24 \cdot 7 = 168, \overline{bcd} = 98 \cdot 7 = 686, \overline{cda} = 123 \cdot 7 = 861, \overline{dab} = 88 \cdot 7 = 616$ 1 punct

Numărul căutat este 1686. 1 punct

Problema (cl. VI) Spunem că 101 numere naturale nenule au proprietatea (U) dacă suma lor este egală cu 1918. Notând cu d cel mai mare divizor comun al 101 numere cu proprietatea (U), să se determine cea mai mare valoare posibilă a lui d.

Costin Negrii, profesor, Bucureşti

Soluţie

Fie numerele $a_1,\ a_2,\ a_3, ..., a_{101} \in \mathbb{N}$ cu proprietatea (U) şi d_a cel mai mare divizor comun al acestora, adică $d_a | a_i$, unde $1 \leq i \leq 101$.

Cum $a_i = d_a \cdot k_i$, pentru $1 \leq i \leq 101$, avem $101 d_a \leq a_1 + a_2 + ... + a_{101} = 1918$.

Aşadar $d_a \leq \dfrac{1918}{101} < 19$.

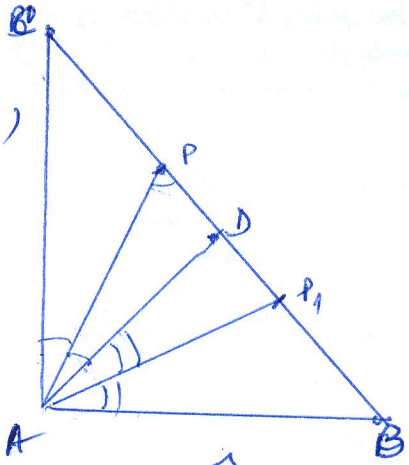
Observăm că $d_a \in D_{1918}$, unde $D_{1918} = \{1, 2, 7, 14, 137, 274, 959, 1918\}$, deci $d_a \in \{1, 2, 7, 14\}$, maximul fiind $d_a = 14$.

Exemplu: $a_1 = a_2 = ... = a_{100} = 14$ şi $a_{101} = 518$.

Problemă propusă pentru clasa a VI-a

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, $AD \perp BC$, $(D \in BC)$ $P \in (BC)$ astfel încât $BP = AB$ și $P_1 \in (BC)$ astfel încât $CP_1 = CA$. Arătați că $m(\hat{PAP_1}) = 45^\circ$

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat.



Soluție și barem.

Din $PB = AB \Rightarrow m(\hat{APB}) = m(\hat{BAP})$

$\Leftrightarrow 90^\circ - m(\hat{PAD}) = m(\hat{PAD}) + m(\hat{DAB})$

dar $m(\hat{DAB}) = m(\hat{ACB})$ deoarece au același complement.

Și deci $90^\circ - m(\hat{PAD}) = m(\hat{PAD}) + m(\hat{ACB}) \Leftrightarrow$

$2m(\hat{PAD}) = 90^\circ - m(\hat{ACB}) \Leftrightarrow 2m(\hat{PAD}) = m(\hat{PAD}) + m(\hat{PAC})$

$\Leftrightarrow m(\hat{PAD}) = m(\hat{PAC})$ (1)

---------- 4 puncte.

Din $CP_1 = CA$ raționând analog obținem:

$m(\hat{DAP_1}) = m(\hat{BAP_1})$ (2)

---------- 2 puncte

Adunând (1) cu (2) și folosind faptul că

$m(\hat{BAP_1}) + m(\hat{P_1AD}) + m(\hat{DAP}) + m(\hat{PAC}) = 90^\circ$ rezultă că

$m(\hat{PAP_1}) = 45^\circ$.

---------- 1 punct

Total — 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE –ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018

Clasa a VII-a

Problema 1

Fie 2020 numere naturale cu proprietatea că suma oricăror 2018 numere luate din ele se divide cu 101. Să se arate că fiecare număr din cele 2020 se divide cu 101.

Costin Negrii, București

Problema 2

Dacă $a,b,c>0$ sunt numere reale și $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4034$, arătați că:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\le 2017$$

E:15129 Gazeta Matematică Nr.1/2017

D.M. Bătinețu Giurgiu, București

Neculai Stanciu, Buzău

Problema 3

În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB>BC$, punctul E aparține diagonalei BD. Perpendiculara în E pe BD intersectează pe AB în M și pe BC în N. Arătați că:

a) $\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{NE}{ME}$

b) $\frac{AB\cdot ME+BC\cdot NE}{BE}$ este constant.

E:15305 Gazeta Matematică Nr.1/2018, Luca Tuță, Buzău

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

Problema (cl. VII) Fie 2020 numere naturale cu proprietatea că suma oricăror 2018 numere se divide cu 101. Arătaţi că fiecare număr se divide cu 101.

Costin Negrii, profesor, Bucureşti

Soluţie

Fie $n_1,\ n_2, ...,\ n_{2020} \in \mathbb{N}$ cu proprietatea din enunţ.

Notăm $S = n_1 + n_2 + ... + n_{2020}$ şi $S_k = S - n_k - n_{k+1}$, unde $1 \leq k \leq 2019$, deci $101|S_k$. 1p

Cum $S_{k+1} - S_k = n_k - n_{k+2}\ \forall\ k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq 2018$, rezultă că n_k şi n_{k+2} dau acelaşi rest la împărţire cu 101, pentru orice k natural, $1 \leq k \leq 2018$. 2p

Considerăm sumele $S' = S - n_1 - n_3$ şi $S'' = S - n_2 - n_1$, evident $101|S'$ şi $101|S''$, deci $101|n_2 - n_1$. (1) 1p

Aşadar $n_1,\ n_2, ...,\ n_{2020}$ dau acelaşi rest la împărţirea cu 101. (2) 1p

Notăm acest rest cu r şi avem: $S = 101t + 2020r \Rightarrow 101|S$, dar $101|S'' \Rightarrow$ $\Rightarrow 101|n_1 + n_2$. (3) 1p

Ştiind că $(101, 2) = 1$, din (1), (2) şi (3) rezultă $101|n_1$, deci 101 divide fiecare din cele 2020 de numere naturale. 1p

E:15129. *Dacă $a, b, c > 0$ sunt numere reale şi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4034$, arătaţi că*

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq 2017.$$

D.M.Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi *Neculai Stanciu*, Buzău

Soluţie. Media armonică a numerelor $\frac{1}{x}$ şi $\frac{1}{y}$ este $m_h=\frac{2}{x+y}$. Din inegalitatea mediilor pentru numerele $\frac{1}{x}$ şi $\frac{1}{y}$ avem $\frac{2}{x+y}\leq\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}$.

Folosind această inegalitate avem

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\leq\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}+\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}+\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2},$$

adică $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\leq 4034$, de unde $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq 2017$.

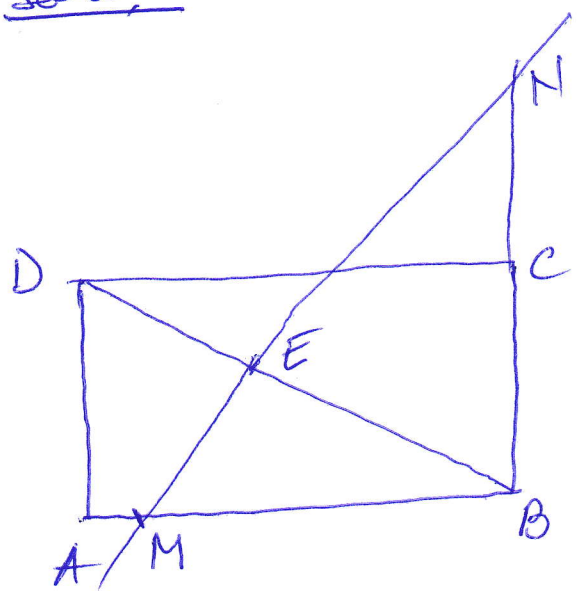
Problemă clasa a VII Tuță Luca GM 1/2018 E:15305

În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB > BC$, punctul E aparține diagonalei BD. Perpendiculara în E pe BD intersectează pe AB în M și pe BC în N. Arătați că:

a) $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{NE}{ME}$

b) $\frac{AB \cdot ME + BC \cdot NE}{BE}$ este constant oricare ar fi poziția punctului E pe diagonala BD.

Soluție



a) $\Delta BEM \sim \Delta BAD \Rightarrow \frac{ME}{BC} = \frac{EB}{AB}$ (1 punct)

$\Delta BEN \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{NE}{AB} = \frac{EB}{BC}$ (1 punct)

Deci $NE = EB \cdot \frac{AB}{BC}$; $ME = EB \cdot \frac{BC}{AB}$ (1 punct)

$\frac{NE}{ME} = \frac{EB \cdot \frac{AB}{BC}}{EB \cdot \frac{BC}{AB}} = \frac{AB^2}{BC^2}$ (1 punct)

b) $\frac{AB \cdot ME + BC \cdot NE}{BE} = AB \cdot \frac{ME}{BE} + BC \cdot \frac{NE}{BE}$ (1 punct)

$= AB \cdot \frac{BC}{AB} + BC \cdot \frac{AB}{BC}$ (1 punct) $= BC + AB =$

$=$ constant (1 punct)

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018

Clasa a VIII-a

Problema 1

Aflați numărul natural n care verifică egalitatea:

$$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}=\frac{\sqrt{2}+4}{2}\ .$$

Viorel Ignătescu, Buzău

Problema 2

Fie a,b,c numere reale pozitive astfel incat $a+b+c=1$. Aratati ca :

$$\sqrt{a^2+4b+4c}+\sqrt{b^2+4c+4a}+\sqrt{c^2+4a+4b}=5$$

Florin Mihai Antohe, Galați

Problema 3

Fie $OABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu $OA=OB=OC=1m, A_l=\frac{3}{2}m^2$, unde A_l este aria laterală a piramidei. Să se calculeze distanța de la vârful O la planul (ABC).

Constantin Rusu, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

CLASA a VIII-a ALGEBRA

Aflați numărul natural n care verifică egalitatea:

$$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}=\frac{\sqrt{2}+4}{2}$$

Rezolvare:

După raţionalizare se obţine:

$$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}=\frac{\sqrt{2}+4}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}+\frac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3}-\sqrt{4})}{(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{4})^2}+\cdots+\frac{\sqrt{n+2}\cdot(1+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3})}{(1+\sqrt{n+2})^2-(\sqrt{n+3})^2}=\frac{\sqrt{2}+4}{2}(1punct)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{1+2\sqrt{2}+2-3}+\frac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3}-\sqrt{4})}{1+2\sqrt{3}+3-4}+\cdots+\frac{\sqrt{n+2}\cdot(1+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3})}{1+2\sqrt{n+2}+n+2-n-3}=\frac{\sqrt{2}+4}{2}(1punct)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3}-\sqrt{4})}{2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{\sqrt{n+2}\cdot(1+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3})}{2\sqrt{n+2}}=\frac{\sqrt{2}+4}{2}(1punct)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+1+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}=\sqrt{2}+4(1punct)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n+1+\sqrt{2}-\sqrt{n+3}=\sqrt{2}+4\Leftrightarrow n+1-4=\sqrt{n+3}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n-3=\sqrt{n+3}$(1 punct)

Condiţii: $n-3\geq 0; n+3\geq 0$ $deci, n\geq 3$

Prin ridicare la pătrat se obţine:

$n^2-6n+9=n+3\Leftrightarrow n^2-7n+6=$

$0(1punct)$ *cu soluţiile* 1 *şi* 6 *din care convine doar a doua, deci soluţia căutată este* $n=6$(1 punct)

Propunător: prof. Ignătescu Viorel Ovidiu

Şcoala gimnazială "G.E.Palade" Buzău

Probleme propuse pentru concursul Sperante Ramnicene

Prof. Antohe Florin Mihai- Scoala nr 29, Galati

2. Fie a.b.c numere reale pozitive astfel incat $a^2+b^2+c^2=1$. Aratati ca :

$$\sqrt{a^2+4b^2+4c^2}+\sqrt{b^2+4c^2+4a^2}+\sqrt{c^2+4a^2+4b^2}=5$$

Solutie

$a^2+b^2+c^2=1$. de unde $b^2=1-a^2-c^2$ si $\sqrt{a^2+4b^2+4c^2}=\sqrt{a^2+4(1-a^2-c^2)+4c^2}=$

$\sqrt{a^2+4-4a^2-4c^2+4c^2}=\sqrt{a^2+4-4a^2}=\sqrt{(a^2-2)^2}=|a^2-2|=2-a^2$ (2 puncte) pentru ca $a^2<2$(1 punct)

Analog $\sqrt{b^2+4c^2+4a^2}=\sqrt{b^2+4-4b^2}=|b^2-2|=2-b^2$ si $\sqrt{c^2+4a^2+4b^2}=$

$\sqrt{c^2+4-4c^2}=|c^2-2|=2-c^2$(2 puncte)

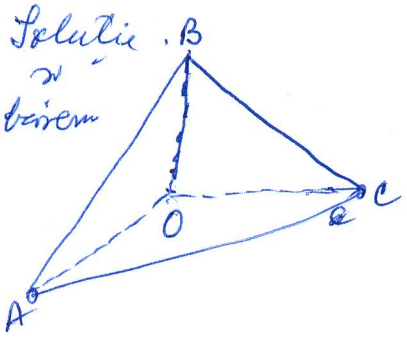
Prin adunare obtinem relatia din enunt.(2 puncte)

Problemă pentru clasa a-VIII-a

Fie o piramidă triunghiulară regulată $OABC$. în care avem: $OA=OB=OC=1m$, $Al=\frac{3}{2}m^2$
Se cere distanța de la vârful O la baza ABC.

Olimpiadă Rusă,

Soluție
Se știe



Piramida fiind regulată rezultă că: $A(\triangle OAB)=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OA\cdot OB\cdot \sin(\hat{AOB})}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow$
$\sin(\hat{AOB})=1 \Rightarrow m(\hat{AOB})=90^\circ$
Analog avem: $m(\hat{BOC})=m(\hat{COA})=90^\circ$

3 puncte

Fie h = distanța de la vârful O la baza ABC.
Folosind formula cu care calculăm volumul piramidei avem:

$$\frac{A(\triangle ABC)\cdot h}{3}=\frac{A(\triangle AOC)\cdot OB}{3}$$ deoarece $OB\perp(AOC)$

Justificare: $OB\perp OA$, $OB\perp OC$ $\Rightarrow OB\perp(AOC)$

3 puncte

Cum $A(\triangle ABC)=\frac{AB^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ avem:

$$h=\frac{A(\triangle AOC)\cdot OB}{A(\triangle ABC)}=\frac{\frac{1\cdot 1}{2}\cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}m$$

1 punct

Total 7 puncte

Notă: Orice altă soluție se va aprecia cu 7 puncte

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018
Clasa a IX-a

Problema 1

Să se arate că:

$$\frac{2}{3}+\sin 2018^{\circ}>0 .$$

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Problema 2

Fie triunghiul ABC şi punctele $M\in(BC), N\in(AC), P\in(AB)$ astfel încât: $\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA}=\frac{AP}{PB}$. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor APN, BMP respectiv CNM. Să se arate că triunghiurile MNP şi $G_1G_2G_3$ au acelaşi centru de greutate.

Ovidiu Ţâţan, Rm. Sărat

Problema 3

Se consideră punctele M, A şi B, necoliniare, x şi y numere reale pozitive. Să se arate că:

$$xMA^2+yMB^2\geq\frac{xy}{x+y}AB^2$$

Constantin Rusu, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte

Problemă clasa a IX-a

Să se arate că $\frac{2}{3} + \sin 2018^\circ > 0$.

Costică Ambrinoc, profesor Rm. Sărat.

Soluție

$2018^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 180^\circ + 38^\circ$ deci $\sin 2018^\circ = -\sin 38^\circ$.
2018° se află în cadranul 3 (1p)
Avem că $\sin x \leq x \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (inegalitate cunoscută sau demonstrată ei) (2p). Inegalitatea este în radiani
Deci $\sin 38^\circ < 38 \cdot \frac{\pi}{180}$ (2p)

$\sin 38^\circ < \frac{38\pi}{180} < \frac{38 \cdot 3{,}15}{180} = \frac{119{,}7}{180} < \frac{120}{180} < \frac{2}{3}$ (1p)

Deci $\frac{2}{3} > \sin 38^\circ \Leftrightarrow \frac{2}{3} > -\sin 2018^\circ \Leftrightarrow \frac{2}{3} + \sin 2018^\circ > 0$
(1p)

Problemă propusă pentru clasa a IX-a

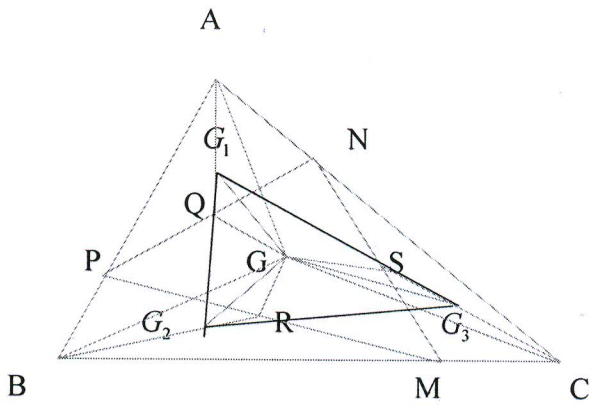
Enunț:

Fie $\triangle ABC$ și punctele $M \in (BC), N \in (AC), P \in (AB)$ astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}$.
Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor APN, BMP respectiv CNM. Să se arate că triunghiurile MNP și $G_1G_2G_3$ au același centru de greutate

prof. Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Soluție:

Fie $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$ și Q, R, S mijloacele segmentelor PN, MP respectiv MN.



Din teorema lui Pappus $\triangle ABC$ și $\triangle MNP$ au același centru de greutate G. Deci este suficient să arătăm că $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$, adică G este centrul de greutate al $\triangle G_1G_2G_3$.(2 puncte)

Avem succesiv: $\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG_1}, \overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BG_2}, \overrightarrow{GG_3} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CG_3}$.(1 punct)

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$\overrightarrow{BG_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BR} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BM}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k+1}\overrightarrow{BA} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC}\right)$$

$$\overrightarrow{CG_3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CS} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k+1}\overrightarrow{CB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{CA}\right)$$ (1punct)

Cum $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ și $\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \frac{k-1}{3(k+1)}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \vec{0}$ (2 puncte)rezultă că $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$ adică G este și centrul de greutate al $\triangle G_1G_2G_3$.(1 punct)

IX

Problemă propusă pentru
clasa a IX-a

Se consideră punctele M, A și B necoliniare, x, y numere reale ~~distincte de zero~~, $x+y \neq 0$, ~~nu~~ strict pozitive — Să se arate că:

$$xMA^2+yMB^2 \geq \frac{xy}{x+y}\cdot AB^2$$

Constantin Rusu

Soluție. Fie vectorul $x\vec{MA}+y\vec{MB}$ ..... 1 punct

Avem: $(x\vec{MA}+y\vec{MB})^2 \geq 0$ (1) ..... 2 puncte

$\Leftrightarrow x^2\vec{MA}^2+y^2\vec{MB}^2+2xy\vec{MA}\cdot\vec{MB} \geq 0$ (2) ..... 1 punct

Cu teorema cosinusului aplicată în $\triangle MAB$ obținem:

$AB^2 = MA^2+MB^2-2MA\cdot MB\cos(\widehat{AMB}) \Rightarrow$ ..... 2 puncte

$2MA\cdot MB\cdot\cos(\widehat{AMB}) = MA^2+MB^2-AB^2$ (3)

Înlocuind în (2) obținem:

$x^2MA^2+y^2MB^2+xy(MA^2+MB^2-AB^2) \geq 0$ ..... 1 punct

$x(x+y)MA^2+y(x+y)MB^2 \geq xy\cdot AB^2 \Leftrightarrow$

$$xMA^2+yMB^2 \geq \frac{xy}{x+y}\cdot AB^2$$

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018
Clasa a X-a

Problema 1

Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$\sqrt[5]{2^x-\frac{1}{2}}-\sqrt[5]{2^x+\frac{1}{2}}=-1$$

Mihai Neagu, Rm. Sărat

Problema 2

Să se rezolve ecuaţia:

$$arctg(3^{\frac{1}{2}-x})+arctg(3^x)=\frac{7\pi}{12}$$

Ovidiu Ţâţan, Rm. Sărat

Problema 3

Să se arate că dacă $z\in C,|z|=1,\arg z\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ atunci:

$$\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\le|1+z|+|1+z^2|+|1+z^4|\le 6$$

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

Cls X Mihai Neagu

Să se rezolve ecuația: $\sqrt[5]{2^x-\frac{1}{2}}-\sqrt[5]{2^x+\frac{1}{2}}=-1$.

Rezolvare.

Ecuația este echivalentă cu $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+2^x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}-2^x}=1$. (1 punct)

Notăm a = $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+2^x}$, $b=\sqrt[5]{\frac{1}{2}-2^x}$. (2 puncte)

a + b = 1, $a^5+b^5=1$ (1 punct)

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5=$

$=a^5+b^5+5ab(a^3+b^3)+10a^2b^2(a+b)=$

$=a^5+b^5+5ab(a+b)(a^2-ab+b^2+2ab)=$

$=a^5+b^5+5ab(a+b)[(a+b)^2-ab]$ (2 puncte)

$1=1+5ab(1-ab)$ → a=0 sau b =0 sau ab =1 → x = – 1 (1 punct)

Problemă propusă pentru clasa a X-a

Enunț:

Să se rezolve ecuația: $arctg\left(3^{\frac{1}{2}-x}\right)+artcg\left(3^{x}\right)=\frac{7\pi}{12}$.

prof. Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Soluție:

Cum $tg\frac{7\pi}{12}=-2-\sqrt{3}$, aplicând funcția tangentă în ambii membrii ai (2 puncte)

relației din enunț se obține: $\frac{\frac{\sqrt{3}}{3^{x}}+3^{x}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3^{x}}+3^{x}=1+\sqrt{3}$ ecuație cu soluțiile (2 puncte) (2 puncte)

1 și $\frac{1}{2}$. (1 punct)

Se poate arăta, utilizând analiza matematică, faptul că imaginea funcției

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=arctg\left(3^{\frac{1}{2}-x}\right)+artcg\left(3^{x}\right)$ este intervalul $\left(\frac{\pi}{2},2arctg\left(\sqrt[4]{3}\right)\right]$, funcția

având un singur punct de extrem $x=\frac{1}{4}$ (punct de maxim).

Cum $2arctg\left(\sqrt[4]{3}\right)>2\cdot52^{0}46'>105^{0}=\frac{7\pi}{12}$, ecuația are doar cele două soluții.

Problema clasa a X-a

Fie $z \in \mathbb{C}$, $|z|=1$, $\arg z \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Să se arate că:
$$\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}} \leq |1+z| + |1+z^2| + |1+z^4| \leq 6$$

Costică Ambrinoc, Profesor, Rm. Sărat

Soluție

Fie $z = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ (1p.)

$1+z = 1+\cos t + i \sin t = 2\cos^2 \frac{t}{2} + 2i \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} =$

$= 2\cos \frac{t}{2} \left(\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2}\right)$ (1p)

$|1+z| = \left|2\cos \frac{t}{2} \left(\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2}\right)\right| = 2\left|\cos \frac{t}{2}\right| \left|\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2}\right| =$

$= 2\cos \frac{t}{2}$ deoarece $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. (1p)

Analog $1+z^2 = 1+(\cos t + i \sin t)^2 = 1+\cos 2t + i \sin 2t =$

$= 2\cos^2 t + 2i \sin t \cos t = 2\cos t (\cos t + i \sin t)$

$|1+z^2| = |2\cos t (\cos t + i \sin t)| = 2|\cos t| |\cos t + i \sin t| =$

$= 2\cos t$ (4 puncte) și analog se obține

$|1+z^4| = |1+\cos 4t + i \sin 4t| = 2\cos 2t$ (1 punct)

Deci $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^4| = 2\left(\cos \frac{t}{2} + \cos t + \cos 2t\right) =$

$= f(t)$

$\frac{t}{2}, t, 2t$ sunt unghiuri în primul cadran acolo unde funcția cos este pozitivă și descrescătoare (1 punct)

Expresia din enunț este mai mică decât

$f(0) = 2\left(\cos \frac{0}{2} + \cos 0 + \cos 2 \cdot 0\right) = 6$

și mai mare decât $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2}\right)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}}$ (1 punct)

Pentru demonstrația $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^4| \leq 6$ cu inegalitatea modulului se vor acorda 2 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018
Clasa a XI-a

Problema 1

Fie $n \in N, n \geq 2$ și $(a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ două șiruri finite de numere reale. Se consideră matricea $A = (x_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, unde $x_{ij} = a_i + b_j$;

a) Să se arate că dacă A este inversabila atunci $n = 2$;
b) Dacă $A \in M_2(Z)$ și A este inversabilă și $A^{-1} \in M_2(Z)$ atunci numerele a_1, a_2 sunt consecutive(nu neapărat în această ordine) și numerele b_1, b_2 sunt consecutive(nu neapărat în această ordine).

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Problema 2

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}, 2x_{n+1} = x_n + \sqrt{3 - 3x_n^2}, \forall n \in N, x_0 \in (0,1)$.
Să se arate că șirul este mărginit,periodic și să se determine x_0 astfel încât șirul să fie convergent.

Ovidiu Ţâţan, Rm. Sărat

Problema 3

Arătaţi că dacă $a, b > 0$, atunci funcţia $f : (0, \infty) \to \left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2} \right)$,
$f(x) = \sqrt{x^2 + (a+b)x + ab} - x$, este bijectivă.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti
Neculai Stanciu, Buzău

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

Problema Clasa a XI-a

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $(a_i)_{1 \le i \le n}$, $(b_j)_{1 \le j \le n}$ două șiruri de numere reale. Se consideră matricea

$A = (x_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ unde $x_{ij} = a_i + b_j$.

a) Să se arate că dacă A este inversabilă atunci $n = 2$.

b) Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și A este inversabilă și $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ atunci perechile de numere a_1, a_2 respectiv b_1, b_2 sunt consecutive.

Costică Ambrinoc, profesor, Rm Sărat.

Soluție.

a) Pentru $n = 3$ avem:

$$A = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} =$$

1 punct

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ b_1 & a_3+b_2 & a_2+b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1+b_3 \\ a_2 & a_2 & a_2+b_3 \\ a_3 & a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_1+b_3 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_3 \\ a_3 & b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1+b_3 \\ b_1 & a_2 & a_2+b_3 \\ b_1 & a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & a_1+b_3 \\ b_2 & b_2 & a_2+b_3 \\ b_3 & b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} =$$ 1 punct

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_3 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$= 0$ q 2 puncte

Pentru $n \geq 3$, se demonstrează analog că $\det A = 0$. Cel puțin două coloane vor fi identice. 1 punct

b) Fie $n=2$ $A = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{pmatrix}$ $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$

Dacă A este inversabilă și $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$ $u, v, w, t \in \mathbb{Z}$ atunci:

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix} = I$$ 1 punct

$$\Leftrightarrow \left[(a_1+b_1)(a_2+b_2) - (a_1+b_2)(a_2+b_1)\right](ut - vw) = 1$$

$$\Leftrightarrow (a_1a_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2 - a_1a_2 - a_1b_1 - a_2b_2 - b_1b_2)(ut-vw) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[a_1(b_2-b_1) - a_2(b_2-b_1)\right](ut-vw) = 1$$

$$\Leftrightarrow (a_1-a_2)(b_2-b_1)(ut-vw) = 1$$ 2 puncte

și cum $a_1, a_2, b_1, b_2, u, v, t, w \in \mathbb{Z}$ rezultă că $a_1 - a_2 = \pm 1$, $b_2 - b_1 = \pm 1$ deci perechile de numere a_1, a_2 respectiv b_1, b_2 sunt consecutive. 1 punct

Problemă propusă pentru clasa a XI-a

Enunț:

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $2x_{n+1} = x_n + \sqrt{3-3x_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 \in (0,1)$. Să se arate că șirul este mărginit, periodic și să se determine x_0 astfel încât șirul să fie convergent.

prof. Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Soluție:

Arătăm că $x_n \in (-1,1), \forall n \in \mathbb{N}$. Din inegalitatea C-B-S obținem $(2x_{n+1})^2 = \left(1\cdot x_n + \sqrt{3}\sqrt{1-x_n^2}\right)^2 \leq (1+3)\left(x_n^2+1-x_n^2\right) = 4 \Rightarrow x_{n+1} \in (-1,1)$. .

Deoarece $x_n \in (-1,1), \forall n \in \mathbb{N}$, există șirul $t_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $x_n = \sin t_n, \forall n \in \mathbb{N}$

deci $\sin(t_{n+1}) = x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x_n^2} = \cos\frac{\pi}{3}\sin(t_n) + \sin\frac{\pi}{3}\cos(t_n) = \sin\left(t_n + \frac{\pi}{3}\right), \forall n \in \mathbb{N}$

Deducem că $x_{n+2} = \sin\left(t_{n+1} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(t_n + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow x_{n+3} = \sin(t_n + \pi) = -\sin(t_n) = -x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ și $x_{n+6} = -x_{n+3} = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ adică șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este periodic cu perioada 6.

Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent dacă și numai dacă el este constant, adică $x_{n+1} = x_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_1 = x_0 \Rightarrow 2x_0 = x_0 + \sqrt{3-3x_0^2} \Rightarrow x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Observații:

1.Problema este în legătură cu prb.nr.3084, R.M.T.nr.2/1987,autor Titu Andreescu.

2.Se poate generaliza.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Arătaţi că dacă $a,b>0$, atunci funcţia $f:(0,\infty)\to\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)$,

$f(x)=\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}-x$, este bijectivă.

D.M.Bătineţu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie.

Fie $\alpha,\beta\in(0,\infty)$, cu $\alpha<\beta$.Atunci

$f(\beta)-f(\alpha)=\sqrt{(\beta+a)(\beta+b)}-\sqrt{(\alpha+a)(\alpha+b)}-(\beta-\alpha)=$

$=\frac{(\beta+a)(\beta+b)-(\alpha+a)(\alpha+b)}{\sqrt{(\beta+a)(\beta+b)}+\sqrt{(\alpha+a)(\alpha+b)}}-(\beta-\alpha)=(\beta-\alpha)\left(\frac{A}{B}-1\right)$, unde

$A=\alpha+\beta+a+b$ şi $B=\sqrt{(\beta+a)(\beta+b)}+\sqrt{(\alpha+a)(\alpha+b)}$.Din inegalitatea mediilor avem, $B<\frac{2\beta+a+b}{2}+\frac{2\alpha+a+b}{2}=A$.Deci, $f(\beta)>f(\alpha)$ şi prin urmare f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.(**3 puncte)**

Deasemenea, f este continuă pe $(0,\infty)$ **(1punct)**şi $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\sqrt{ab}$ **(1punct),**

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{a+b}{2}$.**(1punct)**

Ultima limită rezultă deoarece $f(x)=\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}+x}=\frac{a+b+\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}}}$.

Prin urmare f, este o bijecţie de la $(0,\infty)$ pe $\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)$.□**(1 punct)**

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018
Clasa a XII-a

Problema 1

Fie funcţia $f:R\to R$ continuă cu proprietatea:

$$af(x)+bf(-x)=(x^3+x)^5+\sin^5 x,\forall x\in R,a,b\in R^*,|a|\neq|b|.$$

Să se calculeze:

$$\int_{-2019}^{+2019} f(x)dx$$

Constantin Rusu, Rm. Sărat

Problema 2

Să se determine funcțiile derivabile $F:(0,\infty)\to R$ cu proprietatea:

$$F'(\sqrt{x})=\frac{x^2+x+1}{x+1},\forall x>0$$

Ovidiu Ţâţan, Rm. Sărat

Problema 3

Considerăm inelul $Q[X]$ al polinoamelor cu coeficienți raționali.

Să se arate că:

a) Pentru fiecare $u\in Q[X]$, funcția $F_u:Q[X]\to Q[X], F_u(f)=f(u),\forall f\in Q[X]$, este un endomorfism al inelului $Q[X]$,
b) Orice endomorfism injectiv al inelului $Q[X]$ este de forma F_u cu $u\in Q[X]$, Polinom neconstant (de grad ≥ 1),
c) Orice automorfism al inelului $Q[X]$ este de forma F_u cu $u\in Q[X]$, polinom de gradul 1.

Marcel Ţena, Bucureşti

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

Problemă pentru clasa a XII-a

Fie o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continuă cu proprietatea:
$a f(x)+b f(-x)=(x^3+x)^5+\sin^5 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}^*$, $|a|\neq|b|$
Să se calculeze: $\int_{-2019}^{2019} f(x)\,dx$.

Constantin Rusu, Rămnicu Sărat

Soluție și barem:

- în relația din enunț punem în locul lui x, $-x$ și se obține: $a f(-x)+b f(x)=-(x^3+x)^5-\sin^5 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$
——— 2 puncte

- relația din enunț împreună cu relația precedentă dă un sistem cu necunoscutele $f(x)$ și $f(-x)$ care rezolvat ne dă: $f(x)=\frac{1}{a-b}\left[(x^3+x)^5+\sin^5 x\right]$
——— 2 puncte

- observăm că funcția f este impară $(f(-x)=f(x))$ și $\int_{-2019}^{2019} f(x)\,dx=0$ ——— 2 puncte.

——— finalizare ——— 1 punct

Total 7 puncte.

Problemă propusă pentru clasa a XII-a

prof. Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Enunț:

Să se determine funcțiile derivabile $F:(0,\infty)\to\square$ cu proprietatea $F'\left(\sqrt{x}\right)=\frac{x^2+x+1}{x+1},\forall x>0.$

Soluție:

$F'\left(\sqrt{x}\right)=x+\frac{1}{x+1},\forall x>0.$ Împărțim ambii membrii ai relației cu $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ și obținem: (1 punct) (1 punct)

$F'\left(\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}},\forall x>0\Rightarrow\left(F\left(\sqrt{x}\right)\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)'+\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'\Rightarrow$ (1 punct) (2 puncte)

$F\left(\sqrt{x}\right)=\frac{x\sqrt{x}}{3}+arctg\sqrt{x}+C$ de unde $F(x)=\frac{x^3}{3}+arctg(x)+C,\forall x\in(0,\infty)$ (1 punct) (1 punct)

Problemă cl. a XII-a

Considerăm inelul $\mathbb{Q}[X]$ al polinoamelor cu coeficienți raționali. Să se arate că:

a) Pentru fiecare $u \in \mathbb{Q}[X]$, funcția $F_u : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$, $F_u(f) = f(u)$, $\forall f \in \mathbb{Q}[X]$, este un endomorfism al inelului $\mathbb{Q}[X]$.

b) Orice endomorfism injectiv al inelului $\mathbb{Q}[X]$ este de forma F_u, cu $u \in \mathbb{Q}[X]$, polinom neconstant (de grad ≥ 1).

c) Orice automorfism al inelului $\mathbb{Q}[X]$ este de forma F_u, cu $u \in \mathbb{Q}[X]$, polinom de gradul 1.

Marcel Țena

Soluție a) Pentru $u \in \mathbb{Q}[X]$ fixat și $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ arbitrare, avem:

$F_u(f+g) = (f+g) \circ u = f \circ u + g \circ u = F_u(f) + F_u(g)$; 1 punct

$F_u(fg) = (fg) \circ u = (f \circ u)(g \circ u) = F_u(f) F_u(g)$; 1 punct

$F_u(1) = 1 \circ u = 1$.

Așadar, F_u este un endomorfism (unitar) al inelului $\mathbb{Q}[X]$. 1 punct

b) Fie, deocamdată, $F : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ un endomorfism (oarecare) al inelului $\mathbb{Q}[X]$. Atunci $F(0) = 0$, $F(1) = 1$; rezultă, printr-un raționament standard, că $F(a) = a$, $\forall a \in \mathbb{Q}$. Atunci, pentru un polinom arbitrar $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$, avem $F(f) = F(a_0) + F(a_1) F(X) + \ldots + F(a_n) F(X)^n = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_n u^n = f \circ u = F_u(f)$, unde am notat $u = F(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Rezultă așadar $F = F_u$, unde $u = F(X)$. 1 punct Dacă, în plus, F_u este injectiv, vom arăta că u este un polinom neconstant. Să presupunem prin absurd că $u = c = \text{const.}$ Luând atunci polinoamele $f_1, f_2 \in \mathbb{Q}[X]$ cu $f_2 = f_1 + X - c$, avem $f_1 \neq f_2$, dar $F_c(f_1) = f_1(c)$, iar $F_c(f_2) = f_2(c) = f_1(c) + c - c = f_1(c)$, adică $F_c(f_1) = F_c(f_2)$, ceea ce contrazice injectivitatea endomorfismului F_c. (1 punct)

c) În baza punctului b), orice automorfism al inelului $\mathbb{Q}[X]$ este de forma F_u, cu $u \in \mathbb{Q}[X]$ polinom neconstant. Deoarece F_u este surjectiv, există $f \in \mathbb{Q}[X]$ cu $F_u(f) = X \Leftrightarrow f \circ u = X$. 1 punct Trecând la grade avem $\text{grad } f \cdot \text{grad } u = 1$, deci $\text{grad } f = \text{grad } u = 1$ și soluția se încheie. 1 punct